

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT (mã 121)

PHẦN I. Từ câu 1 đến câu 12, mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $\ln 2 \cdot 2^x + C$. B. $2^x + C$. C. $\frac{2^x}{\ln 2} + C$. D. $\frac{2^x}{x+1} + C$.

Lời giải

Do theo bảng nguyên hàm: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

- A. $S = \int_a^b |f(x)| dx$. B. $S = \int_a^b f(x) dx$. C. $S = -\int_a^b f(x) dx$. D.
 $S = \int_b^a |f(x)| dx$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường

thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 3: Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	$[5; 7)$	$[7; 9)$	$[9; 11)$	$[11; 13)$	$[13; 15)$
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $[7; 9)$. B. $[9; 11)$. C. $[11; 13)$. D. $[13; 15)$.

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm theo giá trị đại diện là

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Giá trị đại diện	6	8	10	12	14
Số ngày	2	7	7	3	1

$$\text{Số trung bình: } \bar{x} = \frac{2.6 + 7.8 + 7.10 + 3.12 + 1.14}{20} = 9,4$$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là

- A. $(0; -2)$.
- B. $(2; 0)$.
- C. $(-2; 0)$.
- D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = -1$.
- B. $y = -1$.
- C. $y = -2$.
- D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$.

Vậy tiệm cận đứng của hàm số đã cho là $x = -2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .

B. Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng -1 .

D. Hàm số có hai điểm cực đại.

Câu 7: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Toạ độ của vector \vec{w} là

A. $\vec{w} = (3; 1; -2)$.

B. $\vec{w} = (3; -1; 2)$.

C. $\vec{w} = (3; 1; 2)$.

D. $\vec{w} = (3; -1; -2)$.

Lời giải

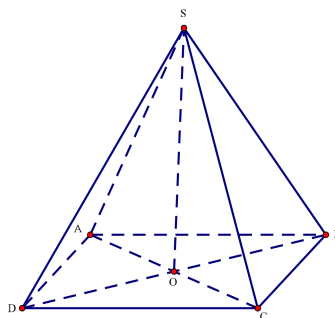
Chọn A

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC$, $SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $SC \perp (ABCD)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có O là trung điểm của AC, BD

Mà $SA = SC, SB = SD \Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \leq 4$ là:

A. $(-\infty; 2]$

B. $[0; 2]$

C. $(-\infty; 2)$

D. $(0; 2)$

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân?

A. 24.

B. 54.

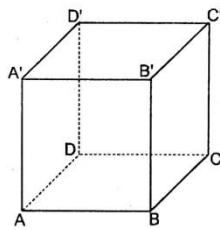
C. 162.

D. 48.

Lời giải

Có $u_4 = u_1 \cdot q^3 = 2 \cdot 3^3 = 54$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. (minh họa như hình bên). Mệnh đề nào sau đây sai?



A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề sai là: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} là hai Vector đối nhau.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3; 0)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-\infty; -3)$.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x - x$.

a) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \cos 2x - 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là $-\frac{\pi}{6}$ hoặc $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là $-\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

a) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$. **Đúng.**

b) Đạo hàm của $f(x) = \sin 2x - x$ là $f'(x) = 2 \cos 2x - 1$. **Sai.**

c) $f'(x) = 2\cos 2x - 1$ khi đó $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ và $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0$, suy ra $x = -\frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. **Đúng.**

d) $f(x) = \sin 2x - x$,

$f'(x) = 2\cos 2x - 1$ có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$,

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}; f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là $-\frac{\pi}{2}$. **Đúng.**

Câu 2: Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng nhanh dần đều với tốc độ $v(t) = 5t$ (m/s);

trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi ô tô bắt đầu chuyển động. Đi được 6 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc

$a = -5$ (m/s²).

a) Tốc độ của ô tô tại thời điểm 10 (s) tính từ lúc xuất phát là 10 (m/s).

b) Quãng đường ô tô chuyển động được trong 6 giây đầu tiên là 80 m.

c) Quãng đường S (đơn vị: mét) mà ô tô chuyển động được kể từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng lại được tính theo công thức $S = \int_0^6 (30 - 5t) dt$.

d) Quãng đường ô tô chuyển động được kể từ lúc bắt đầu chuyển động cho đến khi dừng lại là 170 m.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đúng	Sai	Đúng	Sai

$$v(6) = 30 \text{ (m/s)}.$$

Tốc độ của ô tô tại thời điểm 10 (s) tính từ lúc xuất phát là $30 - 5 \times 4 = 10$ (m/s).

+) Quãng đường ô tô chuyển động được trong 6 giây đầu tiên là $S_1 = \int_0^6 5t dt = 90$ (m).

Gọi t_0 là thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô phanh gấp đến lúc dừng lại. Ta có:

$$30 - 5 \times t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 6$$

+) Quãng đường ô tô chuyển động được kể từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng lại là

$$S = \int_0^6 (30 - 5t) dt = 90 \text{ (m)}$$

Vậy quãng đường ô tô chuyển động được kể từ lúc bắt đầu chuyển động cho đến khi dừng lại là 180m.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$

a) Tập xác định của hàm số là

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

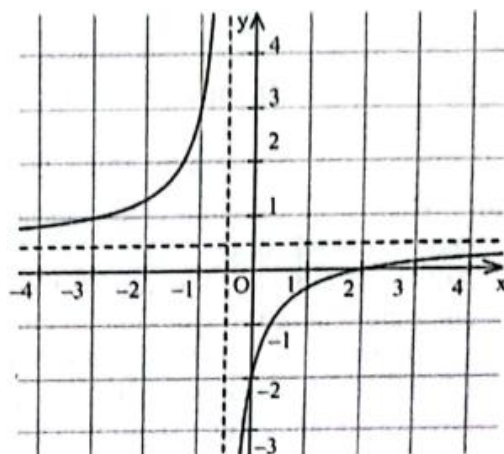
b) Đạo hàm của hàm số là

$$y' = \frac{3}{(2x+1)^2}.$$

c) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm

$$\text{số là } x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}.$$

d) Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên



Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đúng	Sai	Sai	Đúng

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$

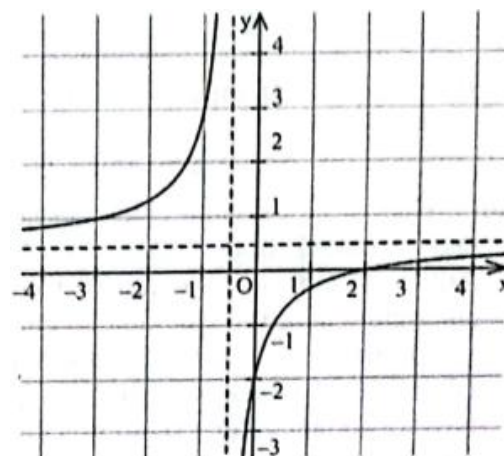
b) Đạo hàm của hàm số là

$$y' = \frac{5}{(2x+1)^2}.$$

c) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

$$\text{là } x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}.$$

d) Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên



Câu 4: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3)$

a) Toạ độ vector $\overrightarrow{AB} = (-1;0;0).$

b) Tọa độ trung điểm \overline{AB} là $\left(\frac{3}{2}; 4; 1\right)$.

c) M là điểm thuộc đoạn thẳng BC sao cho diện tích tam giác ABM gấp ba lần diện tích tam giác AMC. Tọa độ điểm M là $\left(\frac{7}{4}; 4; 2\right)$

d) Biết $N(x; y; z)$, để $3NA^2 + 2NB^2 - NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x + y + z$ bằng 5

a) Đ	b) S	c) Đ	d) S
------	------	------	------

Lời giải

c) Dựa vào $\overline{BM} = 3\overline{MC}$ ta tìm được $M\left(\frac{7}{4}; 4; 2\right)$

$$d) 3NA^2 + 2NB^2 - NC^2 = (2x-3)^2 + (2y-8)^2 + (2z+4)^2 - 19 \geq -19$$

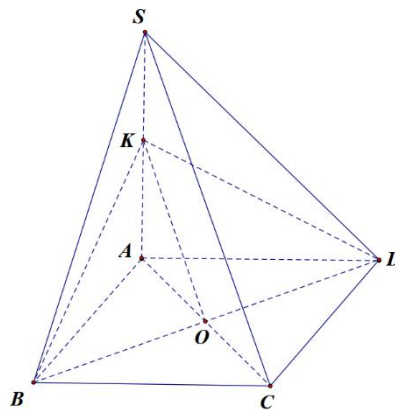
Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{3}{2}, y = 4, z = -2$. Vậy $3x + y + z = 6, 5$

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = 1, \widehat{ACD} = 60^\circ, SA \perp (ABCD)$ và số đo của góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .

Lời giải

Đáp số: 0,75



Ta có : $AD = CD \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Đề ý: $\begin{cases} CD \perp AD, AD \subset (ABCD) \\ CD \perp SD, SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow [S, CD, B] = \widehat{SDA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AD \tan 60^\circ = 3$.

Gọi K là trung điểm cạnh

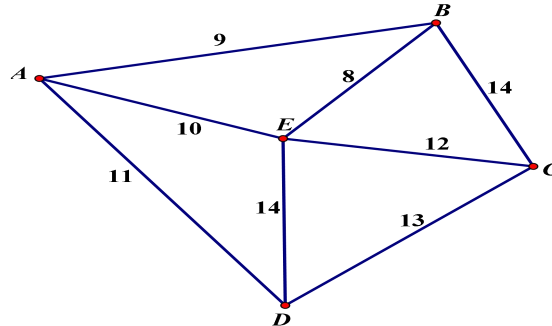
$$SA \Rightarrow SC // OK \Rightarrow SC // (BDK) \Rightarrow d(SC, BD) = d(C; (BDK)) = d(A, (BDK)).$$

Tứ diện $ABDK$ có AB, AD, AK đôi một vuông góc và $AH \perp (BDK)$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AK^2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow AH = 0,75$$

Vậy $d(SC, BD) = d(A, (BDK)) = 0,75$.

Câu 2: Một công ty vận tải cần giao hàng đến tất cả các thành phố A, B, C, D, E (hình vẽ bên dưới). Chi phí di chuyển giữa các thành phố được mô tả trên hình. Xe giao hàng của công ty xuất phát từ một thành phố trong năm thành phố trên đi qua tất cả các thành phố còn lại đúng một lần sau đó trở lại thành phố ban đầu. Tìm chi phí thấp nhất của xe giao hàng.



Đường đi	Tổng số chi phí
$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$	$9+14+12+14+11=60$
$A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$	$9+8+12+13+11=53$
$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$	$10+8+14+13+11=56$
$A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$	$10+14+13+14+9=60$
$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A$	$11+13+12+8+9=53$
$A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$	$11+14+12+14+9=60$

Do đó, tổng số thử thách của đường đi nhận giá trị nhỏ nhất là 53.

Câu 3: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} , biết $f(x) = 16x^3 - 15x^2 + 2x \int_1^2 f(t) dt - 21$. Giá trị của $f(2)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 39.

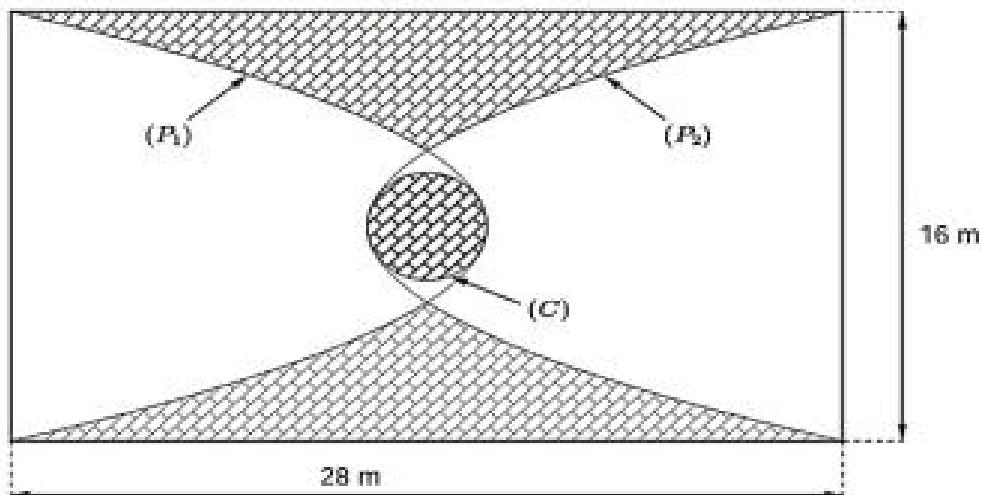
Giả sử $\int_1^2 f(t) dt = a$ và $f(x) = 16x^3 - 15x^2 + 2ax - 21$.

Khi đó ta có:

$$\int_1^2 (16t^3 - 15t^2 + 2at - 21) dt = a \Rightarrow \int_1^2 2at dt + \int_1^2 (16t^3 - 15t^2 - 21) dt \Rightarrow a = -2.$$

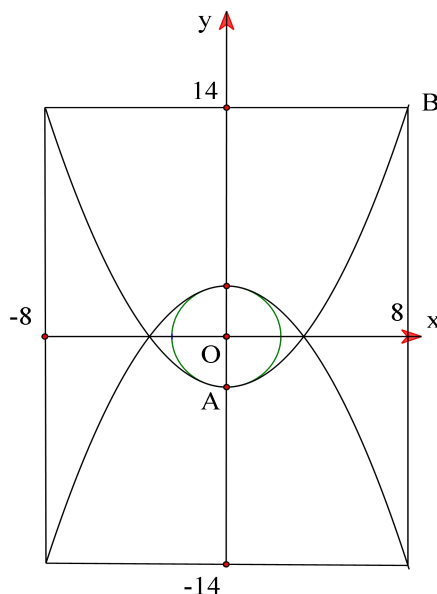
Do đó: $f(x) = 16x^3 - 15x^2 - 4x - 21$ nên $f(2) = 39$.

Câu 4. Người ta lát gạch trang trí một mảnh sân hình chữ nhật có kích thước $28m \times 16m$ như hình vẽ bên dưới, trong đó $(P_1), (P_2)$ là hai parabol đối xứng trục với nhau qua trục đối xứng vuông góc với chiều dài của mảnh sân, (C) là đường tròn có tâm trùng với tâm của mảnh sân và lần lượt có duy nhất một điểm chung với các parabol đó (tham khảo hình vẽ). Chi phí cho phần lát gạch là 240 nghìn đồng một mét vuông. Trong trường hợp hình tròn (C) có diện tích lớn nhất thì chi phí lát gạch là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn tới hàng phần chục)



Lời giải

Trả lời: 32,2.



Từ giả thiết ta gán trục tọa độ như hình vẽ. Gọi r là bán kính đường tròn tâm $O(0;0)$.

Phương trình đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 = r^2$. Suy ra $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

Parabol (P_1) có dạng $y = ax^2 + c$ đi qua điểm $A(0; -r)$, $B(8; 14)$ nên ta có $c = -r$

và $14 = 64a - r \Leftrightarrow a = \frac{r+14}{64}$. Vậy (P_1) là $y = \frac{r+14}{64}x^2 - r$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) với đường tròn:

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{r+14}{64}x^2 - r \Leftrightarrow r^2 - x^2 = \left(\frac{r+14}{64}x^2 - r\right)^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 = \left(\frac{r+14}{64}\right)^2 x^4 - 2r \cdot \frac{r+14}{64} x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{r+14}{64}\right)^2 x^4 + \left(1 - 2r \cdot \frac{r+14}{64}\right) x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \left(\frac{r+14}{64}\right)^2 x^2 = 2r \cdot \frac{r+14}{64} - 1 (*) \end{cases}$$

Vì (C) có duy nhất một điểm chung với các parabol (P_1) nên phương trình (*) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$.

$$\text{Khi đó } 2r \cdot \frac{r+14}{64} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2r^2 + 28r - 64 \leq 0 \Leftrightarrow -16 \leq r \leq 2.$$

Hình tròn (C) có diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow r = 2$. Vậy (P_1): $y = \frac{x^2}{4} - 2$.

Parabol (P_1) cắt trục hoành tại điểm $(-2\sqrt{2}; 0)$ và $(2\sqrt{2}; 0)$.

$$\text{Chi phí bỏ ra để lát gạch là } 0,24.S = 0,24 \cdot \left[4 \cdot \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{4} - 2 \right) dx + \pi 2^2 \right] \approx 32,2 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 5. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Nhà máy A bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải:

Lợi nhuận của nhà máy A khi sản xuất x tấn sản phẩm là:

$$H(x) = xP(x) - C(x) = x(45 - 0,001x^2) - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100, \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$H'(x) = -0,003x^2 + 15$$

$$H'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \text{ (chọn)}$$

$$\text{Ta có: } H(0) = -100, H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100, H(100) = 400$$

$$\text{Do đó: } \max_{[0;100]} H(x) = H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$$

Vậy nhà máy A nên sản xuất 70,7 tấn sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 6. Một lớp không quá 19 học sinh có nhiệm vụ xếp 140 chiếc ghế nhựa thành các chõng.

Nhân việc này họ đã nghĩ ra trò chơi “**lực sĩ**”, thể lệ như sau: Mỗi người bốc một lá thăm trong đó có một lá thăm “**lực sĩ**”, người bốc phải thăm “**lực sĩ**” là người duy nhất làm công việc xếp ghế. Những người còn lại, mỗi người lấy một chiếc ghế trong số 140 chiếc nêu trên để ngồi quan sát. Với số ghế còn lại, chàng lực sĩ đã xếp thành các chõng thỏa

mãn: Chồng thứ nhất có 1 chiếc ghế, từ chồng thứ hai trở đi mỗi chồng nhiều hơn chồng liền trước 1 chiếc ghế. Tính số chồng ghế mà chàng lực sĩ xếp được.

Lời giải

Giả sử u_n là số ghế của chồng thứ n , m là số học sinh. Điều kiện: $n, m \in \mathbb{Z}^+, m < 20$.

Dễ thấy (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai là $d = 1$.

$$\text{Ta có } \frac{n(u_1 + u_n)}{2} + (m - 1) = 140.$$

$$\text{Tức là } m = 141 - \frac{n(1 + n)}{2} \quad (*).$$

Do $m < 20$ nên ta cần phải có $n^2 + n - 242 > 0$. Kết hợp với n là số nguyên dương, ta tìm được $n \in \{16; 17; 18; \dots\}$.

Thử lại:

+ Với $n = 16$, thay vào (*) ta được $m = 5$. Thỏa mãn bài toán.

+ Với $n \geq 17$, thay vào (*) ta được $m < 0$. Không thỏa mãn bài toán.

Tóm lại, số chồng ghế đã xếp được là 16.